INTRODUCCIÓN A LOS $\mathcal{D}$-MÓDULOS

JUAN CAMILO ARIAS Y CAMILO RENGIFO

RESUMEN. Estas notas son las memorias del cursillo dictado en el XXII Congreso Colombiano de Matemáticas en la Universidad del Cauca en Popayán - Colombia. El objetivo de este escrito es brindar un acercamiento a la teoría de módulos sobre el anillo de operadores diferenciales de una variedad algebraica suave.

$\mathcal{D}$-módulos, Haces, variedades algebraicas suaves, álgebras de Lie

ABSTRACT. These are the lecture notes of a short course given at the XXII Colombian Congress of Mathematics held at Universidad del Cauca in Popayán - Colombia. The aim of this paper is to provide an introduction to the theory of modules over rings of differential operators over a smooth algebraic variety.

$\mathcal{D}$-modules, sheaves, smooth algebraic variety, Lie algebras

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de los $\mathcal{D}$-módulos tiene su origen como parte del análisis algebraico[1] de la escuela japonesa de Kyoto, liderada por M. Sato y M. Kashiwara entre otros [18], [19], [20], [11]. Uno de los principales objetivos fue el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando herramientas como la teoría de anillos, el álgebra homológica y la teoría de haces. Paralelamente, el matemático ruso-israelí J. Bernstein introdujo los $\mathcal{D}$-módulos en los artículos [3] y [1] desde el enfoque del análisis complejo. Concretamente, J. Bernstein consideró un polinomio P en n variables complejas y mostró que la función $\mathcal{P}(s) = |P|^s$, para $Re(s) > 0$, extiende a una función meromorfa de s sobre todo el plano complejo, y tal que toma valores en distribuciones de $\mathbb{C}^n$. Algunos de los resultados que se desprenden del estudio de los $\mathcal{D}$-módulos son las hiper-funciones de Sato, el análisis microlocal, aplicaciones a la geometría algebraica, la teoría de representaciones y la física matemática.

Los $\mathcal{D}$-módulos han mostrado ser de gran utilidad ya que mediantes el uso de $\mathcal{D}$-módulos (holonómicos regulares) se resuelve el problema 21 de Hilbert, como consecuencia de la correspondencia de Riemann-Hilbert. Adicionalmente, la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos provee el contexto apropiado para resolver las conjeturas de Kazhdan-Lusztig.

A grosso modo, la correspondencia de Riemann-Hilbert responde a lo siguiente. La monodromía asociada a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales da pié a una representación del grupo fundamental del espacio base. Ahora bien, si se tiene una representación del grupo fundamental del espacio base, ¿es posible encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales tal que su monodromía coincida con la representación fijada previamente?

Por otro lado, otra de las grandes aplicaciones de la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos es el teorema de localización de Beilinson y Bernstein, el cual da una equivalencia entre la categoría de representaciones de un álgebra de Lie semisimple y los $\mathcal{D}$-módulos holonómicos y regulares.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 1402; Secondary 17B10.

Key words and phrases. $\mathcal{D}$-módulos, Haces, variedades algebraicas suaves, álgebras de Lie.

[1]El término análisis algebraico es una palabra atribuida a M. Sato quien buscó estudiar propiedades de funciones y distribuciones analizando los operadores diferenciales lineales que se anulan en estos objetos mediante la teoría de haces, [13].

Como aplicación del teorema de localización y de la correspondencia de Riemann - Hilbert se pueden demostrar las conjeturas de Kazhdan-Lusztig, las cuales buscan las fórmulas de caracteres para las representaciones irreducibles (finito o infinito dimensionales) de un álgebra de Lie semisimple.

A continuación, se ilustra brevemente cómo el uso de los $\mathcal{D}$-módulos permite encontrar el espacio de solución a un sistema de ecuaciones diferenciales desde el punto de vista algebraico. Las nociones que se usan se definirán más adelante, [9].

Sea $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos. Considere un operador diferencial $P = \sum_\alpha g_\alpha \partial^\alpha$, donde $g_\alpha \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$. Estamos interesados en resolver el problema $P(f) = 0$, para f una función polinomial.

En general, podemos considerar un sistema

$$\sum_{j=1}^{q} P_{ij}(f_j) = 0$$

con $i = 1, \ldots p$ y P_{ij} operadores diferenciales. Este sistema lo podemos escribir de manera matricial como $[P_{ij}][f_j]^T = 0$. Para solucionar este sistema de ecuaciones diferenciales se debe encontrar un módulo sobre el anillo de operadores diferenciales. Concretamente, el anillo de operadores diferenciales D_n asociado al anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, está generado por las variables $X_1, \ldots, X_n$ y las derivadas parciales $\partial_1, \ldots, \partial_n$, sujetas a las siguientes relaciones $X_iX_j = X_jX_i$, $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ y la regla de Leibniz. Es decir,

$$D_n := k[X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]/\langle X_iX_j - X_jX_i, \partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i, \partial_iX_i - X_i\partial_i - 1, i, j = 1, \ldots, n\rangle$$

Ahora bien, la matriz $[P_{ij}]$ define una aplicación D_n-lineal $\cdot[P_{ij}] : D_n^p \to D_n^q$ definada por $(u_1, \ldots, u_p) \mapsto (\sum_i u_iP_{i1}, \ldots, \sum_i u_iP_{iq})$, cuya imagen es el ideal $J = \langle u_1(\sum_{j=1}^q P_{1j}) + \cdots + u_p(\sum_{j=1}^q P_{pj}) : u_1, \ldots, u_p \in D_n\rangle$. De lo cual se tiene la secuencia exacta

$$D_n^p \longrightarrow D_n^q \longrightarrow D_n^q/J \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

El módulo D_n^q/J representa el sistema de ecuaciones diferenciales en cuestión, [20]. Explícitamente, si $f_1, \ldots, f_q$ son soluciones del sistema, se define una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\sigma : D_n^q \to \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $e_i \mapsto f_i$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de D_n^q. Note que para $Q \in D_n^q$, se tiene que $\sigma(Q) = Q^T(f_1, \ldots, f_q)$. Así pues, $\sigma(J) = 0$ luego σ induce una aplicación en el cociente $\overline{\sigma} : D_n^q/J \to \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. A su vez, si $\tau : D_n^q/J \to \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal, existe una aplicación $\hat{\tau} : D_n^q \to \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ $\mathbb{C}$-lineal tal que $\hat{\tau}(J) = 0$, es decir $\hat{\tau}$ induce la aplicación τ en el cociente. Defina $g_i = \hat{\tau}(e_i)$, luego para $Q \in J$ se tiene que $Q^T(g_1, \ldots, g_q) = \hat{\tau}(Q) = 0$, es decir, $(g_1, \ldots, g_q)$ es solución del sistema en cuestión. Entonces, las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales corresponden al espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^q/J, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q])$.

Dicho de otra forma, si a la secuencia (1.1) se le aplica el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\_, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$, se obtiene la secuencia exacta

(1.2)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^q/J, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^q, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]) \xrightarrow{[P_{ij}]\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^p, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$$

donde $[P_{ij}] \cdot (\sigma) = [P_{ij}][f_i]^T$ para $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^q, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ dada por $\sigma(e_i) = f_i$. Note que,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(D_n^q/J, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]) = \ker([P_{ij}]\cdot)$$

corresponde precisamente al espacio de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales dado.

Por lo tanto, para un sistema de ecuaciones diferenciales P existe un módulo $M_P := D_n^m/J$, para algunos n y m números naturales y J el ideal generado por P, de tal forma que el espacio de soluciones de P corresponde al espacio vectorial $\mathrm{Sol}(M_p) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_P, \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$. Adicionalmente, con este método algebraico se pueden obtener soluciones generales al sistema P. Por ejemplo, si $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ se reemplaza por el anillo de funciones suaves de un abierto U de $\mathbb{R}^n$ se obtendría soluciones suaves de P.

Nótese que el módulo M_P puede tener diferentes representaciones explícitas. Es decir, pueden existir operadores P y P' tales que $M_P \cong M_{P'}$ como D_n-módulos. Por ejemplo, (ver [12] pp. xiii), en una variable x, considere el operador diferencial $P = x\frac{d}{dx} - \lambda$ y la ecuación diferencial $P(f) = 0$, donde f es una función con valores complejos. Si tomamos $g = xf$, la ecuación diferencial se puede reescribir vía el cálculo

$$P(g) = P(xf) = xf + x^2\frac{d}{dx}f - \lambda xf,$$

de lo cual se tiene que $P(g) - g = (P-1)(g) = 0$. Recíprocamente, si consideramos la ecuación $(P-1)g = 0$, y $\lambda \neq -1$ obtenemos que $f = \frac{1}{\lambda+1}\frac{dg}{dx}$ satisface $P(f) = 0$,

$$P\left(\frac{1}{\lambda-1}\frac{dg}{dx}\right) = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{d}{dx}\left(x\frac{dg}{dx}\right) - \frac{dg}{dx} - \lambda\frac{dg}{dx}\right) = \frac{1}{\lambda+1}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dg}{dx} - \lambda g - g\right) = 0.$$

Más aún, si $g = xf$ con $P(f) = 0$ entonces

$$\frac{1}{\lambda+1}\frac{dg}{dx} - f = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{d}{dx}(xf)\right) - f = \frac{1}{\lambda+1}\left(f + x\frac{df}{dx}\right) - \frac{\lambda+1}{\lambda+1}f = \frac{1}{\lambda+1}\left(x\frac{df}{dx} - \lambda f\right) = 0.$$

Análogamente si $f = \frac{1}{\lambda+1}\frac{d}{dx}g$ con $(P-1)g = 0$, tenemos que $g = xf$.

Por lo tanto vemos que las ecuaciones $P(f) = 0$ y $(P-1)(g) = 0$ son equivalentes. En términos de D_n-módulos esto significa que $M_P \cong M_{P-1}$, y por lo tanto el espacio de soluciones a esta (y a cualquiera equivalente a ella) ecuación diferencial está dado por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_P, \mathbb{C}[X]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_{P-1}, \mathbb{C}[X])$.

El artículo está dividido en cinco secciones. En la primera, los $\mathcal{D}$-módulos se estudian desde el punto de vista local, es decir, dado un anillo conmutativo R, estudiaremos los módulos sobre el anillo de operadores diferenciales de R. Las herramientas necesarias para entender conceptos como variedad característica y módulos holonómicos se presentarán para ofrecer una explicación autocontenida. La segunda sección recapitula los conceptos necesarios de la teoría de haces y variedades algebraicas para entender el enfoque global de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos. En la tercera sección se presentarán los conceptos de haces y variedades algebraicas indispensables para el estudio global de los $\mathcal{D}$-módulos. En la cuarta sección se buscará introducir muy brevemente los $\mathcal{D}$-módulos globalmente. Se dará la definición de $\mathcal{D}$-módulo para una variedad algebraica suave. Adicionalmente, se mostrará cómo conectar estructuras de $\mathcal{D}$-módulo con conexiones planas de un fibrado vectorial y se presentará una lista de ejemplos para ilustrar los conceptos introducidos. Finalmente, en la quinta sección, se presentan algunas aplicaciones a teoría de representaciones y se dará una versión ligera de la correspondencia de Riemann-Hilbert. Es importante decir que estas notas no contienen ningún resultado original, todo el material que se presenta corresponde a la forma en que los autores decidieron dar el cursillo.

2. Nociones preliminares

En esta primera sección se definirá el anillo de operadores diferenciales para $\mathbb{C}[X_1, X_2, ..., X_n]$ y se presentarán algunas de sus propiedades. Adicionalmente, se darán las definiciones de álgebra de Lie y de módulos sobre un álgebra de Lie. Los resultados de esta sección se pueden encontrar en [17] y [10].

2.1. Generalidades. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa. Se denota por $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ la $\mathbb{C}$-álgebra asociativa de endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales de A y por $\mathrm{End}_A(A)$ el espacio vectorial de endomorfismos A-lineales de A. Se sigue que $\mathrm{End}_A(A)$ es una subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$. El lector puede verificar que $A \cong \mathrm{End}_A(A)$ como $\mathbb{C}$-álgebras via el isomorfismo $a \in A \mapsto \hat{a} : A \to A$, donde por definición $\hat{a}(b) = ab$ es la multiplicación en A.

Por tanto, el producto en A coincide con la composición en $\text{End}_A(A)$. De ahora en adelante, los elementos de A se identificarán con los endomorfismos de A que son A-lineales, i.e. $A \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(A)$.

El subespacio vectorial de las derivaciones de A está definido por

$$\text{Der}_{\mathbb{C}}(A) := \{T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(A) |\, T(ab) = aT(b) + bT(a)\}.$$

Para $\phi, \psi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(A)$, el conmutador $[\, ,\,]$ de $\text{End}_{\mathbb{C}}(A)$ está definido por $[\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$. Por definición se tiene que el conmutador $[\, ,\,] : \text{End}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{End}_{\mathbb{C}}(A) \to \text{End}_{\mathbb{C}}(A)$ es una aplicación $\mathbb{C}$-bilineal, antisimétrica y cumple la identidad de Jacobi,

$$[\phi, [\psi, \rho]] = [[\phi, \psi], \rho] + [\psi, [\phi, \rho]].$$

En otras palabras, $\text{End}_{\mathbb{C}}(A)$ es un álgebra de Lie, (ver sección 2.5). Se deja como ejercicio verificar que el conmutador se anula sobre $\text{End}_A(A) \cong A$.

2.2. Operadores diferenciales sobre A. Sean $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(A)$ y $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se dice que T es un operador diferencial de orden menor o igual a p si para todo $a_0, a_1, ..., a_p \in A$ se tiene que

$$[[...[\,[T, a_0], a_1], ...,\,], a_p] = 0.$$

Si T tiene orden menor o igual a cero, para todo $a, a_0 \in A$, $(T \circ a_0 - a_0 \circ T)(a) = T(a_0 a) - a_0 T(a) = 0$, es decir T es un endomorfismo A-lineal.

Observación 2.1. Por definición si T es un operador diferencial de orden menor o igual a p, el operador $[T, a]$ tiene grado menor o igual a $p - 1$ para todo $a \in A$.

Observación 2.2. El orden de un operador diferencial se denotará por $ord()$. Si T es un operador diferencial de orden menor o igual a p, entonces $ord(T) \leq p$.

El subespacio vectorial de todos los operadores diferenciales sobre A se denota por $\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$.

Lema 2.3. Suponga que $T, S \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ son de orden menor o igual que n y m respectivamente. Entonces, $T \circ S$ es un operador diferencial de orden menor o igual que $n + m$.

Proof. Para cada $a \in A$ se tiene que

$$[T \circ S, a] = T \circ [S, a] + [T, a] \circ S.$$

Nótese que $[S, a]$ es de orden menor o igual a $m - 1$ y $[T, a]$ es de orden menor o igual que $n - 1$, luego el resultado se sigue por inducción en el grado de la composición. □

Bajo composición $\circ$ se tiene que $\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ es una subálgebra asociativa de $\text{End}_{\mathbb{C}}(A)$. Adicionalmente, $\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ tiene estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra. Más aún éste es un anillo filtrado no conmutativo, cuya filtración viene dada por el orden de los operadores diferenciales. Explícitamente, la filtración por el orden está definida así

$$F_n\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}, \text{ si } n < 0.$$

$$F_n\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) = \{T \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) |\, \text{orden de } T \leq n\}.$$

La filtración por el orden es creciente, i.e., $F_n\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) \subset F_{n+1}\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$. Por otro lado, se tiene que la filtración por el orden es compatible con la estructura de álgebra de $\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$, es decir, para todo par de enteros n, m

$$F_n\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) \circ F_m\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) \subset F_{n+m}\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A).$$

Lema 2.4. La filtración por el orden cumple las siguientes propiedades

(1) $F_0\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) = A$.
(2) $F_1\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A) = A \oplus \text{Der}_{\mathbb{C}}(A)$.
(3) $[F_n\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A), F_m\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)] \subset F_{n+m-1}\text{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$.

Proof. (1) Se sigue de $\text{End}_A(A) \cong A$.

(2) $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) \subset F_1\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ ya que para $T \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A)$ y $a, b \in A$ se sigue que
$$[T, a](b) = T(a(b)) - a(T(b)) = T(a)b,$$
es decir el conmutador es igual a multiplicar por un elemento de A. Nótese que toda $T \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A)$ cumple que $T(1) = 0$, de lo cual se tiene que $T(a) = [T, a](1)$. Ahora bien, si $S \in F_1\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ defina $T = S - S(1)$ y se sigue que $T(a) = [T, a](1)$ y $T(ab) = [T, ab](1) = bT(a) + aT(b)$. Luego $S = T + S(1)$ donde T es una derivación y $S(1) \in A$. La suma es directa ya que $Der_{\mathbb{C}}(A) \cap A = \{0\}$.

(3) Por inducción en $n + m$. En el caso base no hay nada que demostrar. El paso inductivo se sigue de la siguiente igual (identidad de Jacobi)
$$[[T, S], a] = [[T, a], S] + [T, [S, a]].$$
□

El anillo graduado asociado a la filtración del orden en $\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ está dado por
$$\mathrm{GrDiff}_{\mathbb{C}}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (F_n\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)/F_{n-1}\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_n(\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)).$$
De la condición (3) del Lema 2.4 se tiene que $\mathrm{GrDiff}_{\mathbb{C}}(A)$ es un A-álgebra conmutativa.

Ejemplo 2.5. Considere $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en $\mathbb{C}$. Se denota por $D(n) = \mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$ el anillo de operadores diferenciales. Defínase los símbolos $\partial_1, \ldots, \partial_n$ mediante la regla $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}$ los cuales se extienden a $D(n)$ usando la regla de Leibniz. Se puede mostrar que el conjunto $(\partial_i)_{i=1}^n$ forma una base para $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$ como $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-módulo.

Ahora bien, considere dos conjuntos de índices finitos $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$,
$$X^I = X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}, \quad \partial^J = \partial_1^{j_1} \ldots \partial_n^{j_n},$$
denotan los productos finitos entre los operadores X_i y ∂_j, $1 \leq i, j \leq n$. Por definición se tiene que $X^I\partial^J \in D(n)$ y se puede mostrar que $(X^I\partial^J)_{I,J}$ forman una base como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Es claro que el orden de $X^I\partial^J$ es menor o igual a $|J| = \sum_{l=1}^n j_l$. En general, para $T = \sum_{|I|\leq p} P_I(X_1, \ldots, X_n)\partial^I$ donde $P_I(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, su orden es menor o igual a p.

2.3. El símbolo de un operador diferencial. Sean $n \geq 1$, $T \in F_n\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ y $a_1, ..., a_n \in A$. Considere la aplicación $\sigma_n(T) : A^n \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ definida por
$$\sigma_n(T)(a_1, ..., a_n) = [...[[T, a_1], a_2], ..., a_n].$$
Como el orden de T es menor o igual que n, la aplicación $\sigma_n(T)$ toma valores en $F_0\mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A) \cong A$.

Lema 2.6. La aplicación $\sigma_n(T)$ es $\mathbb{C}$-multilineal simétrica.

Proof. Nótese que para todo $S \in \mathrm{Diff}_{\mathbb{C}}(A)$ y $a, b \in A$ se tiene que
$$[[S, a], b] = [[S, b], a],$$
de lo cual se sigue que
$$\sigma_n(T)(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \sigma_n(T)(a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n),$$
donde $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. □

Observación 2.7. El orden de T es menor o igual a $n - 1 \iff \sigma_n(T) = 0$.

Para el caso $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, el anillo graduado asociado $GrD(n)$ tiene una descripción explícita en términos de generadores y relaciones. Para presentar tal descripción, se construirá un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras denotado por Sym. La función Sym viene inducida por un polinomio $\mathrm{Sym}_p(\,)$ que se define a continuación.

Sea $T \in D(n)$ un operador diferencial de orden menor o igual a p.

- Si $p < 0$, entonces $T = 0$ y $\mathrm{Sym}_p(T) = 0$.

- Si $p = 0$, entonces $T \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ y $\mathrm{Sym}_0(T) = T$.
- Si $p \geq 1$, entonces $\mathrm{Sym}_p(T)$ se construye de la siguiente forma. Para cada n-tupla $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, sea $l_\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i X_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Ahora bien, considere la aplicación $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = F_0 D(n)$ dada por,
$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \frac{1}{p!}\sigma_p(T)(l_\xi, \dots, l_\xi),$$
esta se corresponde a un polinomio en $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$. Definimos $\mathrm{Sym}_p(T)$ como el polinomio asociado a la aplicación anterior.

El polinomio $\mathrm{Sym}_p(T)$ se denomina el p-símbolo de T.

Ejemplo 2.8. Explícitamente, para orden menor igual a p se tiene que,

(1) $\mathrm{Sym}_0(X_i) = X_i$.
(2) $\mathrm{Sym}_1(\partial_i) = \xi_i$, ya que para $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, se tiene
$$\begin{aligned}[\partial_i, \xi_j X_j](f) &= \xi_j(\partial_i X_j - X_j\partial_i)(f) \\ &= \xi_j(\partial_i(X_j f) - X_i\partial_j(f)) = \xi_j\delta_{ij} f.\end{aligned}$$
(3) De los ejemplos anteriores se tiene que si $T = \sum_{|I| \leq p} P_I(X)\partial^I$, entonces
$$\mathrm{Sym}_p(T) = \sum_{|I| \leq p} P_I(X)\xi^I.$$

Lema 2.9. Si $\mathrm{ord}(T) < p$ entonces $\mathrm{Sym}_p(T) = 0$

Proof. Se sigue de la Observación 2.7. □

Por el Lema 2.9 la aplicación Sym_p factoriza por el anillo asociado graduado a la filtración dada por el orden,
$$\mathrm{Sym}_p : \mathrm{Gr}_p D(n) \to \mathbb{C}[X_1, \dots, X_i, \xi_1, \dots, \xi_n],$$
la cual induce la aplicación
$$\mathrm{Sym} : \mathrm{Gr} D(n) \to \mathbb{C}[X_1, \dots, X_i, \xi_1, \dots, \xi_n].$$

Lema 2.10. Sean T y S dos operadores diferenciales de orden p y q respectivamente. Entonces
$$\mathrm{Sym}_{p+q}(T \circ S) = \mathrm{Sym}_p(T)\mathrm{Sym}_q(S)$$

Proof. Ver pp. 21 de [17]. □

En otras palabras del Lema 2.10 se sigue que Sym es una aplicación de $\mathbb{C}$-álgebras. Adicionalmente, por el Ejemplo 2.8, se tiene que Sym es sobreyectiva.

Lema 2.11. $\mathrm{Sym}_p(T) = 0 \iff \mathrm{ord}(T) \leq n - 1$.

Proof. Por inducción en p. Ver pp. 22 de [17]. □

Del lema 2.11 se tiene que la aplicación Sym es inyectiva.

Teorema 2.12. La aplicación Sym es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

2.4. Módulos, soporte y variedad característica. Debido a que $D(n)$ es un anillo no conmutativo, a priori hay que distinguir entre la categoría de $D(n)$-módulos a izquierda y a derecha. Para efectos de las definiciones que se darán en esta sección, se trabajará con $D(n)$-módulos a izquierda.

Por un $D(n)$-módulo M se entenderá un grupo abeliano dotado de la estructura de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$-módulo en el cual los símbolos ∂_i actúan como derivaciones en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$. En esta sección se introducirá un tipo especial de $D(n)$-módulos. Para esto se necesita recordar algunas nociones de teoría de anillos.

Para cada $x \in \mathbb{C}^n$ sea $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] | f(x) = 0\}$ el ideal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ que consiste de funciones que se anulan en x. La localización de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ en $\mathfrak{m}_x$ se denotará por $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_x$. El ideal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_x$ será denotado por $\mathfrak{n}_x$ y ya que $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_x$ es un anillo local regular tenemos que $\mathfrak{n}_x = (\mathfrak{m}_x)_x$.

Consideremos a M con su estructura de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-módulo a izquierda. Para cada $x \in \mathbb{C}^n$ se denota por M_x la localización de M en $\mathfrak{m}_x$, es decir

$$M_x = M_{\mathfrak{m}_x} = (\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] - \mathfrak{m}_x)^{-1}M \cong \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_x \otimes_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]} M.$$

Luego,el soporte de M está dado por

$$\text{Supp}(M) = \{x \in \mathbb{C}^n | M_x \neq 0\}.$$

Para un I un ideal de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ denotaremos por $V(I)$ a la variedad de ceros del ideal I, es decir, $V(I) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n | f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \text{ para toda } f \in I\}$.

Luego el soporte del $D(n)$-módulo M está contenido en $\mathbb{C}^n$. Más aún, como M es un $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-módulo se puede mostrar que

$$\text{Supp}(M) = V(\text{Ann}_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]}(M))$$

donde $\text{Ann}_{\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]}M = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \,|\, fm = 0, \, \forall m \in M\}$. En particular, si M es finitamente generado, entonces Supp(M) es un subconjunto cerrado de Zariski en $\mathbb{C}^n$.

A cada $T \in D(n)$ la aplicación Sym, ver sección 2.3, produce un polinomio en $\mathbb{C}^{2n}$ denotado por $Sym(T)$. Si M es $D(n)$-módulo generado por un ideal $I = \langle T_1, \ldots, T_k \rangle \subset D(n)$, entonces tiene sentido considerar la variedad $V(\{Sym(T) | T \in I\})$, la cual llamamos variedad característica. Esta variedad busca describir el espacio de soluciones del sistema $T_1 u = \ldots = T_k u = 0$ donde $u \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. En muchos casos ocurre que la variedad característica coincide con $V(Sym(T_1), \ldots, Sym(T_k))$, pero puede ocurrir que ésta sea más pequeña. Los $D(n)$-módulos para lo que la variedad es de dimensión mínima son de particular interés, ver sección 4.1. El estudio de estos módulos se encuentra en [9] pp. 81.

En general, para un $D(n)$-módulo M, definimos su variedad característica de la siguiente manera. Supongamos que M admite una buena filtración (ver pp. 10 de [17] para la definición) FM que es compatible con la filtración dada por el orden $FD(n)$ en $D(n)$. En particular, si M es un $D(n)$-módulo finitamente generado, entonces existe una buena filtración FM, (ver pp.10 de [17]).

El ideal característico de M asociado a una buena filtración FM se define por el radical del anulador de $Gr(M)$ con respecto a $GrD(n)$.

$$J(M) = \sqrt{\text{Ann}_{\text{Gr(D(n))}}(Gr(M))}.$$

Proposición 2.13. $J(M)$ no depende de la buena filtración de M.

Proof. Ver pp. 15 de [2]. □

La variedad característica de M está definida por la variedad cortada por el idela $J(M)$,

$$\text{Ch}(M) = V(J(M)).$$

Si se cumple que $\dim(\text{Ch}(M)) = n$ diremos que M es holonómico.

Ejemplo 2.14. $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es un $D(n)$-módulo holonómico.

Ejemplo 2.15. $M = D(n)/I$ donde $I = \langle T_1, \ldots, T_k \rangle$ ideal de $D(n)$, es un módulo holonómico.

2.5. Álgebras de Lie. Un álgebra de Lie es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de una aplicación bilineal $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada corchete de Lie, que cumple las siguientes condiciones

- Antisimetría $[X, Y] = -[Y, X]$, para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- Identidad de Jacobi $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

Ejemplo 2.16.

- El espacio vectorial de las derivaciones $\mathbb{C}$-lineales, $Der_{\mathbb{C}}(A)$ para A una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa, donde el corchete está dado por el conmutador $[\phi, \psi] = \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$.

- Las matrices $n \times n$ con el corchete dado por el conmutador $[X, Y] = XY - YX$ para dos matrices X, Y. Este espacio se denota por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ y es llamado álgebra lineal general.
- El subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ cuyas matrices tienen traza cero con el mismo corchete de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Lie la cual se denota por $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y es llamada álgebra lineal especial. En el caso $n = 2$, una base para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ está formada por las matrices $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Las reglas de conmutación están dada por $[E, F] = H$, $[H, E] = 2E$ and $[H, F] = -2F$.
- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. El espacio vectorial de transformaciones lineales $V \to V$, denotado $\mathfrak{gl}(V)$, tiene estructura de álgebra de Lie donde el corchete está dado por $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. En particular, si V es de dimensión finita n, mediante un isomorfismo $V \cong \mathbb{C}^n$ se tiene que $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, el cual es un isomorfismo que depende de $V \cong \mathbb{C}^n$.

Dadas dos álgebras de Lie $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, [,]_2)$ un morfismo $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ de álgebras de Lie es una aplicación lineal tal que $\phi([X, Y]_1) = [\phi(X), \phi(Y)]_2$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se dice que I es un ideal de $\mathfrak{g}$ si es un subespacio de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, I] \subseteq I$, es decir, I es cerrado bajo el corchete de $\mathfrak{g}$. El kernel y la imagen de un morfismo de álgebras de Lie son ejemplos de ideales. Adicionalmente, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es simple si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ y sus únicos ideales son $\mathfrak{g}$ y 0.

Una representación de $\mathfrak{g}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Se denota la acción de $\mathfrak{g}$ sobre V como $X \cdot v := \rho(X)(v)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. Note que el corchete de dos elementos $[X, Y]$ actúa sobre V mediante la regla $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$. En este caso se dice que V es un $\mathfrak{g}$-módulo o una representación de $\mathfrak{g}$. Los morfismos entre $\mathfrak{g}$-módulos se definen de la manera natural. La categoría de $\mathfrak{g}$-módulos se denotará por $\mathfrak{g}$-Mod.

El álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, denotada por $U(\mathfrak{g})$, se define como:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g} \rangle,$$

donde $T(\mathfrak{g})$ es el álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$. Es importante notar que $U(\mathfrak{g})$ es una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa con unidad, noetheriana y sin divisores de cero. La filtración del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ induce una filtración en $U(\mathfrak{g})$ de tal forma que $GrU(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})$, donde $S(\mathfrak{g})$ es el álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$; este isomorfismo recibe el nombre de Teorema PBW ([10], Teorema 17.3). En particular el Teorema PBW implica que el conjunto de palabras de elementos de $\mathfrak{g}$ forma un conjunto de generadores para $U(\mathfrak{g})$, (una base PBW).

Ejemplo 2.17. Para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, los elementos de la forma $F^i H^j E^k$ forman una base PBW, para todos $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Observación 2.18. Cualquier $\mathfrak{g}$-módulo es un módulo para $U(\mathfrak{g})$ al extender la acción al producto tensorial. Recíprocamente, todo módulo para $U(\mathfrak{g})$ es un módulo para $\mathfrak{g}$ al considerar la acción restricta a los elementos de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $U(\mathfrak{g})$-Mod es equivalente a $\mathfrak{g}$-Mod.

Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ la representación adjunta está dada por la aplicación $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, donde para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es tal que $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ para toda $Y \in \mathfrak{g}$. En. el caso particular de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, la representación adjunta en los elementos básicos viene dada por $\mathrm{ad}_E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{ad}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{ad}_H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Haces y Variedades Algebraicas

En esta sección se presentan las definiciones básicas de variedades algebraicas y haces definidos sobre estos espacios. Adicionalmente, se ejemplificarán en algunos casos las definiciones presentadas en esta sección. El contenido de esta sección está inspirado en [8, 14, 2, 9].

3.1. Algunas observaciones en la teoría de haces sobre espacios. Sea X un espacio topológico. Denote por $Op(X)$ la categoría de los conjuntos abiertos de X, i.e. la categoría cuyos objetos son los conjuntos abiertos de X y para cualesquiera dos conjuntos abiertos U y V de X existe un morfismo de U a V si y sólo si $U \subseteq V$. La categoría opuesta de $Op(X)$ se denota $Op(X)^o$.

Un prehaz[2] $\mathcal{F}$ sobre X con valores en una categoría $\mathcal{C}$ es un functor $\mathcal{F} : Op(X)^o \to \mathcal{C}$. Explícitamente para todo $U \subseteq X$ subconjunto abierto, $\mathcal{F}(U)$ es un objeto de $\mathcal{C}$. Para cada inclusión $\iota : U \hookrightarrow V$ existe un morfismo "restricción" $\mathcal{F}(\iota) = \rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Más aún, para todo abierto U, $\rho_U^U = id_{\mathcal{F}(U)}$ y para cualquier tripleta de abiertos U, V, W tales que $U \subseteq V \subseteq W$ se tiene que $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$. Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto cero 0 entonces $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

Observación 3.1. En este artículo la categoría $\mathcal{C}$ corresponderá a alguna de las siguientes: la categoría de conjuntos Sets, la categoría de grupos abelianos Ab, la categoría de anillos Rings o la categoría de R-módulos R-Mod para un anillo R dependiendo del contexto.

Para cualquier abierto $U \subseteq X$ los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se llaman secciones locales de $\mathcal{F}$. Si $\iota : U \subseteq V$ es una inclusión entre dos conjuntos abiertos de X y $s \in \mathcal{F}(V)$, la restricción $\rho_U^V(s)$ se denota por $s|_U$. Es usual denotar el conjunto de secciones locales $\mathcal{F}(U)$ por $\Gamma(U, \mathcal{F})$. El functor $\Gamma(U, \_)$ se llama functor de secciones locales. En el caso $U = X$, el functor $\Gamma(X; \_)$ es llamado functor de secciones globales de X.

En adelante se trabajará bajo el supuesto que $\mathcal{C}$ es una categoría en la cual existen productos. Un prehaz $\mathcal{F}$ sobre X con valores en $\mathcal{C}$ es un haz, si para todo abierto U de X y cualquier cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de U el siguiente diagrama es un ecualizador en $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

En otras palabras, para todo abierto $U \subseteq X$ y todo cubrimiento $\{U_i\}$ de U se tiene que F cumple las siguientes propiedades

(1) Si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para toda i, entonces $s = t$.
(2) Si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ es tal que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ entonces existe (única) $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$

Observación 3.2. Si existe una sección "cero" en $\mathcal{F}(U)$, por ejemplo $\mathcal{C}$ es Ab, entonces la condición (1) dice que toda sección que es localmente la sección cero debe ser la sección cero.

Ejemplo 3.3. Sea X un espacio topológico, para todo abierto $U \subseteq X$ se define $C_X^0(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad f \text{ es continua } \}$. Claramente C_X^0 es un prehaz y puesto que su naturaleza es puramente local se tiene que C_X^0 es un haz. Si X es una variedad suave, se define $C_X^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \quad f \text{ es suave } \}$, y se tiene que la asignación C_X^∞ es un haz. Similarmente, para X una variedad compleja, el haz de funciones holomorfas se define de manera similar y para X una variedad algebraica (o esquema) se tiene el haz de funciones regulares.

Ejemplo 3.4. Sea X un espacio topológico y sea A un grupo abeliano con la topología discreta. Defina $\mathcal{A}(U) = \{f : U \to A | \quad f \text{ es continua } \}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un haz llamado haz localmente constante. Si U es conexo, $\mathcal{A}(U) \cong A$, caso contrario es isomorfo una suma directa de copias de A.

Para cualesquiera dos haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre X con valores en $\mathcal{C}$, un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una transformación natural entre los functores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, i.e. para todo par de abiertos $U \subseteq V$ de X, $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:

[2] La palabra (pre)haz se utiliza como traducción de la palabra francesa (pré)faisceaux o de la palabra inglesa (pre)sheaf. Dependiendo de la escuela, en español se utiliza la palabra (pre)gavilla como sinónimo de (pre)haz.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] \arrow[d, "\rho_U^V"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho_U^V"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] & \mathcal{G}(U). \end{tikzcd}$$

Se denotará la categoría de prehaces sobre X con valores en $\mathcal{C}$ por $PSh(X, \mathcal{C})$; si la categoría $\mathcal{C}$ es clara en el contexto de trabajo, entonces sólo se escribirá $PSh(X)$, y se denotará su subcategoría plena de haces como $Sh(X)$. Cabe notar que si la categoría $\mathcal{C}$ es abeliana, entonces la categoría $Sh(X)$ también lo es. En lo que sigue la categoría $\mathcal{C}$ se supondrá ser una categoría abeliana.

Se sigue que todo haz es un prehaz, es decir, existe el functor de olvido $for : Sh(X) \to PSh(X)$. Sin embargo, no todo prehaz es un haz. Pero es sabido que el functor for cuenta con un functor adjunto a izquierda $i^+ : PSh(X) \to Sh(X)$ el cual a cada prehaz $\mathcal{F}$ le asocia un haz llamado "sheafification" $i^+\mathcal{F}$. Al ser functores adjuntos se tiene el siguiente isomorfismo de conjuntos

$$\mathrm{Hom}_{PSh(X)}(\mathcal{F}, for(\mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(i^+(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

lo cual es equivalente a decir que para cualquier prehaz $\mathcal{F}$, y cualquier haz $\mathcal{G}$ y morfismo de prehaces $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G} = for(\mathcal{G})$, (note que $\mathcal{G} = for(\mathcal{G})$ como prehaz), existe único morfismo $\varphi : i^+(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}$ tal que $\psi = \varphi \circ \eta_{\mathcal{F}}$, donde $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to i^+(\mathcal{F})$ es el morfismo de adjunción. Por $\mathcal{F}^+$ se denota el haz $i^+(\mathcal{F})$ el cual admite una descripción explicita dada por

$$\mathcal{F}^+(U) = \left\{ s : U \to \bigcup_{x\in U} \mathcal{F}_x \quad | \quad s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ y } \begin{cases} \forall x \in U, \exists V \ni x, V \subseteq U \text{ y } t \in \mathcal{F}(V) \\ \text{tal que } \forall y \in V \text{ se tiene que } t_y = s(y) \end{cases} \right\}.$$

Todo morfismo de haces con valores en Ab define los siguientes prehaces asociados a él. Suponga que $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces con valores en Ab.

- El kernel de φ: Para todo abierto $U \subseteq X$, $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi(U))$.
- El cokernel de φ: Para todo abierto $U \subseteq X$, $(\operatorname{coker} \varphi)(U) = \operatorname{coker}(\varphi(U))$.
- La imagen de φ: Para dodo abierto $U \subseteq X$, $(\operatorname{im} \varphi)(U) = \operatorname{im}(\varphi(U))$.

Se puede mostrar que el kernel de φ es de hecho un haz, sin embargo, esto no ocurre con los prehaces imagen y cokernel. Por lo tanto los haces imagen y cokernel de φ son las "sheafificaciones" de estos prehaces y se denotan $\operatorname{im} \varphi$ y $\operatorname{coker} \varphi$ respectivamente.

Ya que uno de los objetivos de los haces es entender información local, es importante definir gérmenes de secciones locales. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X, el "stalk" sobre $x \in X$ está dado por

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) = \bigsqcup_{x\in U} F(U)/\sim .$$

Así, el stalk $\mathcal{F}_x$ tiene por elementos clases de equivalencia $[f, U]$ donde U es un abierto y $f \in \mathcal{F}(U)$. Dos clases $[f, U]$ y $[g, V]$ son equivalentes si existe abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$. De lo cual se tiene que el germen de una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ se define como la imagen en el stalk $s_x \in \mathcal{F}_x$.

Dados dos haces $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, $\mathcal{F}'$ es un subhaz de $\mathcal{F}$ si para cualquier abierto U de X, $\mathcal{F}'(U)$ es un subobjeto de $\mathcal{F}(U)$ y el morfismo restricción de $\mathcal{F}'$ se hereda de $\mathcal{F}$.

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ haces sobre X y sean $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismos de haces, entonces:

- φ es un monomorfismo si y sólo si $\ker \varphi = 0$, i.e., φ_x es un monomorfismo en $\mathcal{C}$.
- φ es un epimorfismo si y sólo si $\operatorname{im} \varphi = \mathcal{G}$, i.e., φ_x es un epimorfismo en $\mathcal{C}$.

- $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces si y sólo si φ es un monomorfismo, ψ es un epimorfismo y $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$, i.e., $0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta en la categoría $\mathcal{C}$.

3.2. Variedades algebraicas. La idea intuitiva de una variedad afín corresponde al conjunto de ceros de un sistema de ecuaciones polinomiales. Una variedad algebraica, será una variedad que admite un cubrimiento finito por variedades afines, es decir, es un espacio que localmente es el conjunto de ceros de un sistema polinomial. Estos conjuntos de ceros no necesariamente coinciden de un abierto a otro. En esta sección se darán algunas ideas básicas sobre variedades algebraicas. Por simplicidad el campo de base serán los números complejos, $\mathbb{C}$.

Sea $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Considere un ideal I de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ y defina el conjunto $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0, \ \forall f \in I\}$. $V(I)$ se llama conjunto algebraico. Como primeros ejemplos tenemos que $V(0) = \mathbb{C}^n$ y que $V(1) = \emptyset$. Claramente, $V(I) \subseteq V(0) = \mathbb{C}^n$ para todo ideal I del anillo de polinomios.

Los conjuntos algebraicos son cerrados bajo uniones finitas y bajo intersecciones arbitrarias. Recuerde que $V(0) = \mathbb{C}^n$ y $V(1) = \emptyset$ son conjuntos algebraicos. Así, los conjuntos algebraicos forman una topología (por conjuntos cerrados) de $\mathbb{C}^n$. Esta topología se llama la topología de Zariski. Los abiertos básicos de esta topología se denotan por $D(f) = \mathbb{C}^n \setminus V(f)$, para f un polinomio.

Observación 3.5. El espacio $\mathbb{C}^n$ está dotado de dos topologías, la topología analítica y la topología de Zariski. Ya que el conjunto de ceros de un conjunto de polinomios es cerrado en la topología analítica, tenemos que la topología analítica es más fina que la topología de Zariski.

El espacio $\mathbb{C}^n$ con la topología de Zariski, está dotado de manera natural de una familia distinguida de funciones, a saber, las funciones polinomiales. Estas funciones están en correspondencia biyectiva con el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. A un polinomio visto como una función sobre $\mathbb{C}^n$ lo llamaremos una función regular, y el conjunto de funciones regulares de $\mathbb{C}^n$ se denotará por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n) := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Las funciones regulares se pueden definir también para todo abierto (con la topología de Zariski) U de $\mathbb{C}^n$, el conjunto de tales funciones se denota por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ y está en correspondencia con las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ tales que para cada $V \subset U$ abierto básico, $f|_V$ es una función racional que no tiene polos en V. Se puede mostrar que la asignación $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ para todo abierto de $\mathbb{C}^n$ es un haz de $\mathbb{C}$-álgebras. El par $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ se llama espacio afín n-dimensional.

Sea Y un conjunto cerrado irreducible del espacio afín $\mathbb{C}^n$, es decir Y no puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos cerrados propios. $\mathcal{O}_Y(Y)$ se define como el conjunto de funciones regulares en Y, es decir, $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)/I(Y)$, donde $I(Y) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n) \mid f(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$ es el ideal que define a Y. Similarmente, se puede definir un haz de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathcal{O}_Y$ asociado a la variedad Y.

Ahora bien, una variedad algebraica afín es un par $(Y, \mathcal{O}_Y)$ donde Y es un cerrado irreducible del espacio afín $\mathbb{C}^n$ y $\mathcal{O}_Y$ es el haz de funciones regulares. El par $(Y, \mathcal{O}_Y)$ se escribe simplemente como Y, teniendo presente que este espacio está dotado del haz estructural $\mathcal{O}_Y$.

Dadas dos variedades algebraicas afines X y Y, un morfismo $\varphi : X \to Y$ es una función continua tal que para todo abierto U de X y toda función regular $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ se tiene que $g \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. El morfismo φ es un isomorfismo si φ es un homeomorfismo y la asignación en anillos de funciones regulares $g \mapsto g \circ \varphi$ es un isomorfismo de anillos.

Decimos que un par $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es un haz de $\mathbb{C}$-álgebras sobre X, es una variedad algebraica si X admite una cubierta finita por variedades algebraicas afines.

Observación 3.6. Las variedades algebraicas serán separadas, intuitivamente esto significa ser Hausdorff en el sentido usual.

Ejemplo 3.7. La línea proyectiva $\mathbb{P}^1$ se define como el conjunto $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, donde ∞ es un símbolo, el punto al infinito. Equivalentemente, $\mathbb{P}^1$ se define como el espacio de clases de equivalencia de parejas (x_0, x_1) de elementos de $\mathbb{C}^2$ tale que $x_0 \neq 0$ y $x_1 \neq 0$, bajo la relación de equivalencia $(x_0, x_1) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1)$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La clase de equivalencia de un punto en $\mathbb{P}^1$ se denotará por $[x_0 : x_1]$. Las funciones regulares en los abiertos de $\mathbb{P}^1$ son localmente cocientes de polinomios homogéneos en dos variables del mismo grado. Se puede mostrar que $\mathbb{P}^1$ es una variedad algebraica la cual tiene cubierta U_0, U_1 donde $U_0 = \mathbb{P}^1 - \{[1, 0]\} \cong \mathbb{C}$ y $U_1 = \mathbb{P}^n - \{[0, 1]\} \cong \mathbb{C}$.

Observación 3.8. El haz de funciones regulares de $\mathbb{P}^1$ se puede construir "pegando" los haces de su cubierta afín.

3.3. $\mathcal{O}_X$-módulos. Los haces que trabajaremos en el resto de estas notas tienen la estructura extra de módulo. Veremos su definición, algunas propiedades y ejemplos de los mismos.

Suponga que $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica y sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Se dice que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo si para todo abierto U de X se tienen que $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, y si para $V \subseteq U$, V abierto, el morfismo restricción $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo vía el morfirmo $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$. Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{I}$ es un haz de ideales si $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$ para todo abierto U de X.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos si $\varphi(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-homomorfismo. Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ se dice libre si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n$, para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. $\mathcal{F}$ se dice localmente libre si existe una cubierta $\{U_i\}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es libre.

Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente si admite resolución $\mathcal{O}_X^I \to \mathcal{O}_X^J \to \mathcal{F} \to 0$, donde I y J son dos conjuntos indexantes arbitrarios. Además $\mathcal{F}$ es coherente si los conjunto I y J son finitos.

Observación 3.9. En otras palabras, la definición anterior es equivalente a la siguiente; un haz $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente si para todo abierto afin U el haz $\mathcal{F}|_U$ es generado por un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo M_U. $\mathcal{F}$ es coherente si el módulo M_U es finitamente generado. Note que el módulo depende del abierto que se escoja.

A continuación se presentan dos ejemplos relevantes para el estudio de los $\mathcal{D}$-módulos, a saber, el haz tangente y el haz de 1-formas diferenciales. Cabe mencionar que el haz tangente y el haz de 1-formas aparecen en geometría diferencial como fibrados vectoriales naturales sobre X.

Ejemplo 3.10 (El haz tangente). Denote por $\underline{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ el haz de endomorfismos lineales del anillo $\mathcal{O}_X$. Una sección $\theta \in End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)(X)$ se dice una derivación si para todo abierto U de X se tiene que $\theta|_U \in Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X(U))$, donde $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X(U))$ denota el espacio de derivaciones lineales del anillos $\mathcal{O}_X(U)$.

Denote por $\mathcal{T}_X(U)$ el conjunto de derivaciones sobre U. La asignación $U \mapsto \mathcal{T}_X(U)$ define un $\mathcal{O}_X$-módulo el cual se denota por $\mathcal{T}_X$. Dado que los módulos $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X(U))$ son finitamente generados, el haz $\mathcal{T}_X$ es coherente.

Ejemplo 3.11. Sea $X = \mathbb{C}^n$. Entonces $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y como se vió en el ejemplo 2.5, $Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$ está generado por los símbolos $\partial_1, \ldots, \partial_n$ tales que $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}$ y extendidos por la regla de Leibniz. Para un abierto de X, las derivaciones sobre tal abierto se corresponderán con las restricciones de las derivaciones de X. Si $Y \subseteq X$ una variedad afín cerrada, entonces $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(Y)$ y $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Y(Y)) = \{\theta \in Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]) \mid \theta(I) \subseteq I\}$, es decir, $Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Y(Y))$ está generado por los generadores ∂_i tales que $\partial_i(I(Y)) \subseteq I(Y)$.

Para poder definir el haz de formas diferenciales recuerde que dada una $\mathbb{C}$-álgebra A entonces el A-módulo de 1-formas diferenciales Ω_A se define como el módulo libre generado en los símbolos da para toda $a \in A$ sujeto a las relaciones $d(a + a') = da + da'$, $d(aa') = (da)a' + a(da)$ para todas $a, a' \in A$ y $dc = 0$ para toda $c \in \mathbb{C}$. En particular, si $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ se tiene que Ω_A es el módulo generado por los símbolos $dX_1, \ldots, dX_n$. Más aún se puede mostrar que $dX_i(\partial_j) = \delta_{ij}$, es decir, Ω_A y $Der_{\mathbb{C}}(A)$ son duales como espacios vectoriales.

Ejemplo 3.12 (El haz de 1-formas). Para X una variedad algebraica y U un abierto afín de X, $\Omega_{\mathcal{O}_X(U)}$ denota el $\mathcal{O}_X(U)$-módulo de 1-formas diferenciales del anillo $\mathcal{O}_X(U)$. La asignación $U \mapsto \Omega_{\mathcal{O}_X(U)} = \Omega_X(U)$ define un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos el cual se denota por Ω_X. Por definición este es un haz coherente.

Para cerrar esta sección, se definen el tipo de variedades algebraicas con las cuales se trabajará en el resto de esta nota. Este tipo de variedades permitirán entender de manera mucho más concreta los objetos de interés, los $\mathcal{D}$-módulos.

Sea X una variedad algebraica y sea $x \in X$. Recuerde que el stalk del haz $\mathcal{O}_X$ en el punto x se denota por $\mathcal{O}_{X,x}$. Este es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_x$. A este ideal pertenecen todas (los gérmenes de) las funciones que se desvanecen en x. Se dice que X es suave en el punto $x \in X$ si el anillo $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local regular, es decir, si la dimensión del espacio vectorial $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ coincide con la dimensión de Krull de $\mathcal{O}_{X,x}$. Equivalentemente, si $\Omega_{X,x}$ es libre de rango dimensión de Krull de $\mathcal{O}_{X,x}$. La dimensión de X en el punto x se denota por $\dim_x X$ y es por definición la dimensión de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Una variedad algebraica es suave si lo es en cada punto $x \in X$. A una variedad suave se le asocia un número llamado dimensión y denotado por $\dim X$, que por definición es $\dim_x X$ para cualquier $x \in X$. Como el campo base son los números complejos, entonces las variedades suaves consideradas con la topología analítica tienen estructura de variedades complejas. Ejemplos de variedades algebraicas suaves son el espacio afín y el espacio proyectivo.

Teorema 3.13. Sea X una variedad algebraica suave de dimensión n. Entonces para toda $x \in X$, existe un abierto afín $V \ni x$ y existen funciones regulares $X_i \in \mathcal{O}_X(V)$ y $\partial_i \in \mathcal{T}_X(V)$ para $i = 1, \ldots, n$ que cumplen $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}$ y $\mathcal{T}_X|_V \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X|_V \partial_i$.

Proof. Ver Teorema A.5.1 en [9]. □

Al sistema $\{X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ definido en una vecindad afín de un punto $x \in X$ se le llamará sistema de coordenadas locales en x.

4. $\mathcal{D}$-MÓDULOS

En esta sección se presentarán las definiciones del haz de operadores diferenciales sobre una variedad algebraica suave y los $\mathcal{D}$-módulos sobre tal haz.

4.1. Definiciones.

Sea X una variedad algebraica suave de dimensión n. El haz de operadores diferenciales sobre X, denotado por $\mathcal{D}_X$, se define como el $\mathbb{C}$-subhaz de $\underline{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ generado por $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{T}_X$. En otras palabras, para todo abierto U de X el anillo $\mathcal{D}_X(U)$ está generado por símbolos $\{\hat{f}, \hat{\theta} \mid f \in \mathcal{O}_X(U), \theta \in \mathcal{T}_X(U)\}$ sujetos a las relaciones:

- $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}$ y $\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg}$, para $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$.
- $\hat{\theta} + \hat{\zeta} = \widehat{\theta + \zeta}$ y $[\hat{\theta}, \hat{\zeta}] = \widehat{[\theta, \zeta]}$, para $\theta, \zeta \in \mathcal{T}_X(U)$.
- $\hat{f}\hat{\theta} = \widehat{f\theta}$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\theta \in \mathcal{T}_X(U)$.
- $[\hat{\theta}, \hat{f}] = \widehat{\theta(f)}$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\theta \in \mathcal{T}_X(U)$.

Equivalentemente, el haz de operadores diferenciales sobre X se puede definir de la siguiente forma. Para cualquier punto $x \in X$ considere $\{X_i, \partial_i\}_{i=1}^n$ un sistema local de coordenadas alrededor de x en $U \ni x$ una vecindad abierta afín. Entonces,

$$\mathcal{D}_X|_U \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \mathcal{O}_X|_U \partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Ejemplo 4.1. El álgebra de funciones globales para $X = \mathbb{C}^n$ es el anillo de polinomios en n variables $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Como se vio previamente, $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n} = \text{Diff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]) = D_n$. Explícitamente, $D_n = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n]/\langle X_iX_j - X_jX_i, \partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i, \partial_iX_i - X_i\partial_i - 1, i, j = 1, \dots, n\rangle$.

Ejemplo 4.2. Para $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tiene que $\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{D}_{\mathbb{C}^*}) \cong \mathbb{C}[z, z^{-1}, \partial]/\langle[\partial, z] = 1,\ [\partial, z^{-1}] = -z^{-2}\rangle$.

Ejemplo 4.3. Sea $X = \mathbb{P}^1$ la línea proyectiva. Sean $0 = [1 : 0]$ y $\infty = [0 : 1]$ y considere la cubierta de $\mathbb{P}^1$ cuyos abiertos afínes son $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ y $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. Identifique U_0 con $\mathbb{C}$ mediante el morfismo $z : U_0 \to \mathbb{C}$, $z([1, : x_1]) \mapsto x_1$ e identifique U_1 con $\mathbb{C}$ mediante el morfismo $\zeta : U_1 \to \mathbb{C}$, $z([x_0 : 1]) \mapsto x_0$. Note que $U_0 \cap U_1 \cong \mathbb{C}^*$, donde z y ζ se relacionan mediante la equación $z = 1/\zeta$.

Se sigue que $\Gamma(U_0, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C}[z, \partial]/\langle[\partial, z] = 1\rangle$, $\Gamma(U_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C}[\zeta, \partial_\zeta]/\langle[\partial_\zeta, \zeta] = 1\rangle$ y $\Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C}[z, z^{-1}, \partial]/\langle[\partial, z] = 1, [\partial, z^{-1}] = -z^{-2}\rangle$. Los morfirmos de restricción están dados por $z \mapsto z$, $\partial \mapsto \partial$ para el caso $\Gamma(U_0, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \to \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ y por $\zeta \mapsto z^{-1}$ y $\partial_\zeta \mapsto -z^2\partial$ para el caso $\Gamma(U_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) \to \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$.

Ahora bien, como una sección global $s \in \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ debe satisfacer que la restricción a U_0, $s|_{U_0}$, es de la forma $z^i\partial^j$ para algunas i, j, y la restricción a U_1, $s|_{U_1}$, es de la forma $\zeta^n\partial_\zeta^m$ para algunas n, m y que además sobre $U_0 \cap U_1$ tales restricciones coincidan. Se sigue que $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}) = span\{1, z^i\partial^j \ |i \leq j + 1,\ j > 0\}$. Más aún, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ tiene base dada por $\{-\partial, -2z\partial, z^2\partial\}$.

Observe que si $E = -\partial$, $H = -2z\partial$ y $F = z^2\partial$, se tiene que $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$ y $[E, F] = H$, es decir, E, H y F cumplen las relaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y por lo tanto se obtiene un morfismo sobreyectivo $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$, cuyo kernel está generado por el elemento de Casimir $C = H^2 + 2EF + 2FE$. Por lo tanto, $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/\langle C\rangle \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ es un isomorfismo.

Sea U un abierto en X y considere un operador $T \in \mathcal{D}_X(U)$. Se dirá que T es de orden menor o igual a p si para todo abierto afín $V \subseteq U$ se tiene que $T|_V$ es un operador diferencial de orden menor o igual a p, (ver definición 2.2). El orden definido sobre los operadores diferenciales induce una filtración creciente en $\mathcal{D}_X(U)$ que se denota por $F\mathcal{D}_X(U)$. Esta filtración induce una filtración en $\mathcal{D}_X$ denotada por $F\mathcal{D}_X$, de tal forma que el haz graduado $Gr\mathcal{D}_X$ es un haz de anillos conmutativos tal que $Gr_0\mathcal{D}_X \cong \mathcal{O}_X$.

Por medio de esta filtración se puede mostrar que $\mathcal{D}_X$ es un haz cuasi-coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos tanto a izquierda como a derecha. Además los haces $F_p\mathcal{D}_X$ son $\mathcal{O}_X$-coherentes y por lo tanto $Gr_p\mathcal{D}_X$ es $\mathcal{O}_X$-coherente. Como ya vimos en el caso de anillos (ver sección 2), la filtración de grado uno está generada por el anillo y las derivaciones. En este caso se tiene el resultado análogo, es decir, $F_1\mathcal{D}_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X$.

Cabe notar que el Teorema 2.12 se puede globalizar de la siguiente forma. Sea X una variedad algebraica suave, se puede construir una aplicación símbolo como en el caso de $\mathbb{C}$-álgebras, de tal forma que $Gr\mathcal{D}_X$ es isomorfo como haz graduado al haz de funciones regulares del espacio cotangente (ver [17]).

Decimos que un haz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos es un $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda, si para todo abierto U de X, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{D}_X(U)$-módulo a izquierda para el cual las acciones son compatibles con los morfismos de restricción.

Observación 4.4. En otras palabras, una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo sobre un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ se corresponde con un morfismo $\mathcal{O}_X$-lineal de álgebras de Lie $\nabla : \mathcal{T}_X \to End_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$, $\theta \mapsto \nabla_\theta$. Es decir, un morfismo que cumple $\nabla_{f\theta} = f\nabla_\theta$, $\nabla_{[\theta_1,\theta_2]} = [\nabla_{\theta_1}, \nabla_2]$ y $\nabla_\theta(fs) = f\nabla_\theta(s) + \theta(f)s$ para toda $f \in \mathcal{O}_X, \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T}_X$ y $s \in \mathcal{F}$.

En el caso que $\mathcal{F}$ sea un $\mathcal{D}_X$-módulo localmente libre sobre $\mathcal{O}_X$, diremos que el morfismo ∇ es una conexión plana para el fibrado vectorial asociado a $\mathcal{F}$. En general, esto no ocurre con regularidad pues los $\mathcal{D}_X$-módulos son en su mayoría cuasi coherentes sobre $\mathcal{O}_X$. Por lo tanto, los $\mathcal{D}_X$-módulos generalizan la idea de las conexiones planas para cualquier rango.

Un caso particular donde se puede garantizar que un $\mathcal{D}_X$-módulo sea localmente libre es el siguiente: Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo que además es $\mathcal{O}_X$-coherente, entonces $\mathcal{F}$ es localmente libre sobre $\mathcal{O}_X$. Por lo tanto, se dice que un $\mathcal{D}_X$-módulo es una conexión integrable o sólamente una conexión si es $\mathcal{O}_X$-coherente.

Una clase de $\mathcal{D}_X$-módulos de particular importancia son los llamados holonómicos. Estos $\mathcal{D}_X$-módulos se pueden definir como se vió en la sección 2.4 en términos de variedades características, pero ya que este tipo de variedades son un poco más complicadas de definir en el caso general, es suficiente decir que los módulos holonómicos son los $\mathcal{D}_X$-módulos que genéricamente son conexiones, es decir, son módulos para los cuales existe un abierto denso en X tal que su restricción a éste es una conexión. Los módulos holonómicos forman una categoría abeliana y son de particular importancia en teoría de representaciones.

4.2. Ejemplos. Presentaremos diferentes ejemplos que permitan ilustrar las ideas ya estudiadas de los $\mathcal{D}$-módulos. Para mayor profundidad véase [2], [17] y [9].

4.2.1. Ejemplo: El trivial. $\mathcal{D}_X$ es claramente un $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda y a derecha.

4.2.2. Ejemplo: Un poco menos trivial. El haz de funciones regulares sobre X, $\mathcal{O}_X$, es un $\mathcal{D}_X$-módulo a izquierda. La acción de las funciones está dada por multiplicación y las derivadas actúan derivando funciones regulares. Más aún, como X es una variedad suave, cuenta con un sistema de coordenadas $\{X_i, \partial_i\}_{i=1}^n$, donde $n = \dim X$. Entonces $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, donde $\mathcal{D}_X(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ es el ideal generado por $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$.

4.2.3. Ejemplo: La "función" delta. Similar al ejemplo anterior, al considerar el ideal generado por $X_1, \ldots, X_n$, donde estas son funciones regulares que generan un sistema de coordenadas para X, defínase el módulo Δ_X como el cociente $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(X_1, \ldots, X_n)$. Si se denota la imagen de 1 en el cociente como δ, se sigue que este elemento satisface $\delta \cdot X_i = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Defina δ en un punto $x \in X$ de la siguiente forma. Considere $\Delta_x := \mathbb{C}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$, este módulo es generado por el símbolo δ_x y cumple que $\delta_x \cdot f = f(x)$ para f una sección local de X.

4.2.4. Ejemplo: Formas diferenciales de orden superior - El $\mathcal{D}$-módulo a derecha. Sea $\omega_X := \bigwedge^n \Omega_X$, donde $n = \dim X$. ω_X es el ejemplo prototípico de $\mathcal{D}_X$-módulo a derecha. Las acciones están dadas como sigue. Sean $f \in \mathcal{O}_X$, $\zeta \in \mathcal{T}_X$ y $\alpha \in \omega_X$, entonces $\alpha \cdot f := f\alpha$ y $\alpha \cdot \zeta := -Lie_\zeta(\alpha)$, donde la anterior expresión denota la derivada de Lie.

Nótese que en efecto la estructura está bien definida. Sean $\zeta, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{T}_X$, $f, f_1, f_2 \in \mathcal{O}_X$ y $\alpha \in \omega_X$,

- $(\alpha \cdot f_1) \cdot f_2 = (f_1\alpha) \cdot f_2 = f_2(f_1\alpha) = (f_2 f_1)\alpha = (f_1 f_2)\alpha = \alpha \cdot (f_1 f_2)$.
- $(\alpha \cdot f) \cdot \zeta = -Lie_\zeta(f\alpha) = -\zeta(f)\alpha - fLie_\zeta(\alpha) = (\alpha \cdot \zeta) \cdot f - \alpha \cdot \zeta(f)$
- $\alpha \cdot [\zeta_1, \zeta_2] = -Lie_{[\zeta_1,\zeta_2]}(\alpha) = -(Lie_{\zeta_1}(Lie_{\zeta_2}(\alpha)) - Lie_{\zeta_2}(Lie_{\zeta_1}(\alpha))) = (\alpha \cdot \zeta_1) \cdot \zeta_2 - (\alpha \cdot \zeta_2) \cdot \zeta_1$
- $(\alpha \cdot f) \cdot \zeta = -Lie_\zeta(f\alpha) = -Lie_{f\zeta}(\alpha) = \alpha \cdot (f\zeta) = \alpha \cdot (f \cdot \zeta)$

Las anteriores relaciones se siguen por las propiedades de la derivada de Lie. En general un módulo a izquierda se puede considerar como un módulo a derecha tensorizando por el módulo ω_X.

4.2.5. Ejemplo: Ecuaciones diferenciales. Sea X una variedad algebraica (analítica) suave de dimensión n y considere un operador diferencial P. Localmente, para un abierto U de X el operador P se escribe como $P = \sum_I g_I \partial^I$, donde $g_I \in \mathcal{O}_X(U)$, $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-indice y $\partial^I = \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}$. Se quiere solucionar la ecuación $P(f) = 0$ para f en algún $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{F}$. Note que la naturaleza de las soluciones que se quieran obtener apuntan a que haz $\mathcal{F}$ escoger, por ejemplo, si queremos soluciones polinomiales el haz a escoger es $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, para el caso de soluciones analíticas tomamos el haz de funciones holomorfas.

Veamos como encontrar el conjunto de soluciones de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. Consideremos un operador matricial $P = [P_{ij}]$ donde $i = 1, \ldots p$, $j = 1, \ldots, q$ y los P_{ij} son operadores diferenciales. Por tanto, las soluciones al sistema $Pf = 0$ son de la forma $f = (f_1, \ldots, f_q)$. Para encontrar estas soluciones del sistema de ecuaciones $Pf = 0$, considere el morfismo de $\mathcal{D}_X$-módulos $\cdot P : \mathcal{D}_X^p \to \mathcal{D}_X^q$ definido como $\cdot P(u) = uP$. Considere ahora la sucesión exacta

$$\mathcal{D}_X^p \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}_X^q \longrightarrow M_P \longrightarrow 0$$

donde M_P denota el cokernel del morfismo $\cdot P$. Al aplicar el functor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\_, \mathcal{F})$, a la anterior sucesión exacta se obtiene

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M_P, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^q, \mathcal{F}) \xrightarrow{P\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^p, \mathcal{F})$$

Note que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^r, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}^r$ mediante el morfismo $(\varphi : \mathcal{D}_X^r \to \mathcal{F}) \mapsto \{\varphi(e_i)\}_{i=1}^r$ para $\{e_i\}_{i=1}^r$ la base canónica $\mathcal{D}_X^r$ como $\mathcal{D}_X$-módulo. Por tanto, la anterior sucesión se transforma en

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M_P, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}^q \xrightarrow{P\cdot} \mathcal{F}^p$$

luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M_P, \mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F}^q \mid Pf = 0\}$

En decir, el espacio $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M_P, \mathcal{F})$ contiene todas las soluciones del sistema que pertenecen al $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{F}$. Se dice que el módulo M_P representa al sistema de ecuaciones diferenciales.

4.2.6. Ejemplo: La exponencial. Sea $X = \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Defina $E_\lambda = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(\partial - \lambda)$. Este módulo es generado por la imagen del 1, (el generador de $\mathcal{D}_X$ como $\mathcal{D}_X$-módulo), cuya imagen se denota en E_λ por el símbolo $e^{\lambda z}$. Es decir, $E_\lambda \cong \mathcal{D}_X e^{\lambda z}$, y $(\partial - \lambda)e^{\lambda z} = 0$. Nótese que $\partial e^{\lambda z} = \lambda e^{\lambda z}$.

Ahora, como se vio en el Ejemplo 4.2.5, el espacio $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(E_\lambda, \mathcal{F})$ debe capturar la información de las soluciones del operador $P = \partial - \lambda$, que pertenecen al haz $\mathcal{F}$. Si se toma $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, una solución f que sea global debe cumplir que $f \in \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[z]$, $(\partial - \lambda)f = 0$, la cual no existe. Considerando a X con la topología usual y tomando $\mathcal{F}$ como el haz de funciones holomorfas, se encontraría que existe una sección global f tal que $(\partial - \lambda)f = 0$; la función exponencial usual.

4.2.7. Ejemplo: La "función" z^λ. Sea $X = \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Considere el módulo $M_\lambda = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(z\partial - \lambda)$. Como en el ejemplo anterior 4.2.6, a la imagen del 1 en $\mathcal{D}_X$ se denotará por z^λ. Así se tiene que $M_\lambda \cong \mathcal{D}_X z^\lambda$. Además se cumple la ecuación diferencial $(z\partial - \lambda)z^\lambda = 0$, i.e., $z\partial z^\lambda = \lambda z^\lambda$.

Adicionalmente, sobre M_λ se tiene lo siguiente. Defina el operador $E = z\partial$ en $\mathcal{D}_X$ y note que $[E, z] = z$ y $[E, \partial] = -\partial$. Por lo tanto, se tiene que $Ez = z(E+1)$ y $E\partial = \partial(E-1)$. Luego en el módulo M_λ, z y ∂ son vectores propios del operador E con valores propios $\lambda + 1$ y $\lambda - 1$ respectivamente. Es decir, se ha obtenido que $Ez = z(\lambda+1)$ y $E\partial = \partial(\lambda - 1)$. Por inducción en n se sigue que $Ez^n = z^n(\lambda + n)$ y $E\partial^n = \partial^n(\lambda - n)$.

Defina las siguientes acciones $z \cdot z^\lambda = z^{\lambda+1}$, $\partial \cdot z^\lambda = \lambda z^{\lambda - 1}$ y $E \cdot z^\lambda = (\lambda)z^\lambda$. Si $\lambda \notin \mathbb{Z}$, ninguna de las anteriores acciones se anula, por lo tanto, el módulo M_λ es irreducible. Caso contrario si $\lambda \in \mathbb{Z}$, existirá una potencia de z que se anula y por tanto la acción de ∂ en este elemento se anula, así el módulo será reducible.

Los ejemplos 4.2.2, 4.2.3, 4.2.5, 4.2.6 y 4.2.7 son, además, ejemplos de módulos holonómicos.

5. Aplicaciones

En esta sección, se presentan dos de las aplicaciones más célebres de la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos. La correspondencia de Riemman-Hilbert y el teorema de localización de Beilinson y Bernstein.

La correspondencia de Riemann-Hilbert, en su forma original se pregunta sobre la existencia de sistemas de ecuaciones diferenciales regulares, dada una representación del grupo fundamental de la variedad en la cual está definido el sistema. En términos más generales, la correspondencia de Riemann-Hilbert afirma que conexiones singulares regulares sobre una variedad fija están en correspondencia uno a uno con representaciones de su grupo fundamental. En el libro [6], P. Deligne demuestra este teorema en el contexto de haces y categorías derivadas. Una introducción a este tema se puede encontrar en la primera parte del libro [9] y en los capítulos 3 y 4 del libro [5].

La segunda aplicación, el teorema de localización de Beilinson y Bernstein, afirma que toda representación de un álgebra de Lie semisimple se puede entender geométricamente como un $\mathcal{D}$-módulo sobre la variedad bandera del álgebra de Lie. Esta importante relación permitió demostrar las conjeturas de Kazhdan-Lusztig las cuales permiten identificar todos los módulos simples que componen a un módulo de Verma, (un módulo indescomponible de peso máximo), es decir, permiten conocer el caracter de cualquier representación irreducible en términos de los módulos de Verma. Además de esto, este teorema dió inicio a la teoría geométrica de representaciones. La demostración de este teorema está publicada en el artículo [4]. Una introducción compacta al tema se encuentra en las notas de D. Gaitsgory "Geometric Representation Theory", [7]. En la segunda parte del libro [9] se encuentra el tema de manera comprensiva además de la demostración de las conjeturas de Kazhdan - Lusztig. En los artículos [15] y [16] se puede encontrar el planteamiento original de las conjeturas de Kazhdan - Lusztig y su estudio utilizando geometría algebraica.

5.1. La correspondencia de Riemman - Hilbert. Sea X una variedad algebraica suave. En la sección 4 se definió una conexión como un $\mathcal{D}_X$ módulo que es $\mathcal{O}_X$ coherente. En particular, éstos módulos son $\mathcal{D}_X$-módulos localmente libres de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$. La categoría de las conexiones sobre X se denota por $Conn(X)$.

Sea $\mathcal{F} \in Conn(X)$. Es claro que la estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo de $\mathcal{F}$ es equivalente a la existencia de un morfismo de álgebras de Lie $\nabla : \mathcal{T}_X \to End_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, tiene sentido considerar secciones s tales que $\nabla_\theta(s) = 0$ para toda sección del haz tangente θ. Considere el haz $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ definido por las secciones para las cuales la conexión se anula, es decir, para $U \subseteq X$ abierto, sea $\mathcal{L}_\mathcal{F}(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \nabla_\theta(s) = 0 \ \forall \theta \in \mathcal{T}_X\}$. Se puede mostrar que $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ es un haz localmente isomorfo a $\mathbb{C}$, es decir, es un haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Este tipo de haces se llaman sistemas locales. Recíprocamente, dado un sistema local $\mathcal{L}$, se puede construir una conexión como $\mathcal{F}_\mathcal{L} := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}$.

Con lo anterior se puede escribir una primera instancia de la correspondencia de Riemman - Hilbert:

Teorema 5.1 ([9], Corolario 5.3.10). La categoría de conexiones sobre X es equivalente a la categoría de sistemas locales sobre X.

Existe una versión mucho más sofisticada del Teorema 5.1 el cual va más allá de los propósitos de estas notas. No sobra decir que este Teorema es un primer resultado en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales en dominios del plano complejo. La idea es que dada una ecuación diferencial es posible asociarle una matriz (llamada monodromía) que permite medir la diferencia entre las soluciones locales y globales del sistema. Adicionalmente, esta matriz corresponde con a una representación del grupo fundamental del dominio sobre el cual está definido el sistema en cuestión. Esta representación a su vez se puede interpretar como un sistema local en el dominio de interés. La pregunta original, el problema número 21 de Hilbert, es el siguiente. Dada una matriz de este tipo (i.e. de monodromía) es siempre posible encontrar una ecuación diferencial que realice tal matriz. La respuesta fue afirmativa gracias al Teorema 5.1.

5.2. El teorema de Localización de Beilinson y Bernstein. Como se vió en el Ejemplo 4.3, $\phi : U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/\langle C\rangle \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$ es un isomorfismo de álgebras, donde C es el elemento de Casimir. Se puede mostrar que C genera el centro $Z = Z(U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ del álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, por lo tanto el isomorfismo ϕ se escribe así $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/Z\cdot U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1})$. Este isomorfismo se puede extender a una versión más general válido para cualquier álgebra de Lie semisimple.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y sea $U(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. Se denota por Z el centro de $U(\mathfrak{g})$. Sea X la variedad bandera de $\mathfrak{g}$, es decir, la variedad que tiene como elementos todas las subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$. En particular para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $X = \{F = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}$. Así, para $\mathfrak{sl}_2(C)$, X es el espacio de líneas en $\mathbb{C}^2$, es decir, $X = \mathbb{P}^1$.

Sea $\mathcal{D}_X$ el haz de operadores diferenciales en la variedad bandera X y $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ el conjunto de secciones globales.

Teorema 5.2 ([7], Teorema 6.18). Existe un isomorfismo de álgebras $U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$.

Más aún, se puede demostrar que el functor $\Gamma(X, \ )$ no tiene cohomología en grado superior y que todo $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{F}$ está generado por las secciones globales. A partir de estos resultados junto con el Teorema 5.2 se puede demostrar el siguiente:

Teorema 5.3 (Beilinson - Bernstein, [4]). La categoría de $U(\mathfrak{g})$-módulos con acción trivial del centro (i.e. la categoría de $U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g})$-módulos) es equivalente a la categoría de $\mathcal{D}_X$-módulos que son $\mathcal{O}_X$-cuasi-coherentes.

Proof. (Idea de la demostración.) El functor $\Gamma(X, \_)$ tiene por adjunto a izquierda el functor $Loc(\ \ ) = \mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})/Z\cdot U(\mathfrak{g})} (\ \ )$. Por lo tanto tenemos el morfismo de adjunción $1_{U(\mathfrak{g})/Z\cdot U(\mathfrak{g})-\mathrm{mod}} \Rightarrow \Gamma(X, \ \ ) \circ Loc$. Ahora, para I, J dos conjuntos, considere $N \in U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}) - \mathrm{mod}$ y la secuencia exacta $(U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^I \to (U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^J \to N \to 0$. Entonces, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^I \arrow[r] \arrow[d] & (U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^J \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Gamma(X, Loc((U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^I)) \arrow[r] & \Gamma(X, Loc((U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^J)) \arrow[r] & \Gamma(X, Loc(N)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el teorema 5.2, $\Gamma(X, Loc((U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^K)) \cong \Gamma(X, (\mathcal{D}_X)^K)) \cong (U(\mathfrak{g})/Z \cdot U(\mathfrak{g}))^K$ para $K = I, J$, así $\Gamma(X, Loc(N)) \cong N$. Análogamente, para $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-módulo se obtiene $Loc(\Gamma(X, \mathcal{M})) \cong \mathcal{M}$. □

References

[1] Bernstein, Joseph, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 6(4), (1972), 26 - 40.

[2] Bernstein, Joseph, Lectures on D-modules, University Lecture, 1982 - 1983.

[3] Bernšteĭn, I. N., The possibility of analytic continuation of $f_+{}^\lambda$ for certain polynomials f, Funkcional. Anal. i Priložen, 2(1) (1968), 92–93.

[4] Beĭlinson, Alexandre and Bernstein, Joseph, Localisation de g-modules, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., (292)1, (1981), 15 - 18.

[5] Borel, A. and Grivel, P.-P. and Kaup, B. and Haefliger, A. and Malgrange, B. and Ehlers, F., Algebraic D-modules, Perspectives in Mathematics, Vol. 2, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1987).

[6] Deligne, Pierre, Équations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1970).

[7] Gaitsgory, Dennis, Geometric Representation Theory, Class notes - Fall 2005, (2005).

[8] Hartshorne, Robin, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977).

[9] Hotta, Ryoshi and Takeuchi, Kiyoshi and Tanisaki, Toshiyuki, D-modules, perverse sheaves, and representation theory, Progress in Mathematics, Vol. 236, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. (2008).

[10] Humphreys, James E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1978).
[11] Kashiwara, Masaki, Algebraic study of systems of partial differential equations, Mém. Soc. Math. France (N.S.), (63), (1995), xiv+72.
[12] Kashiwara, Masaki, D-modules and microlocal calculus, American Mathematical Soc., (217), (2003).
[13] Kashiwara, Masaki and Kawai, Takahiro and Kimura, Tatsuo, Foundations of Algebraic Analysis (PMS-37), Volume 37, Princeton University Press, (2017).
[14] Kashiwara, Masaki and Schapira, Pierre, Sheaves on manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, (1994). With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.
[15] Kazhdan, David and Lusztig, George, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math., 53(2), (1979), 165 - 184.
[16] Kazhdan, David and Lusztig, George, Schubert varieties and Poincaré duality, Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1980), 185 - 203.
[17] Miličić, Dragan, Lectures on Algebraic Theory of D-modules, University Lecture.
[18] Sato, Mikio, Theory of hyperfunctions. I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, (8), (1959), 139 - 193.
[19] Sato, Mikio, Theory of hyperfunctions. II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, (8), (1960), 387 - 437.
[20] Sato, Mikio and Kawai, Takahiro and Kashiwara, Masaki, Microfunctions and pseudo-differential equations, Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau), Lecture Notes in Math., Vol. 287, (1973), 265–529.

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia
Email address: `jc.arias147@uniandes.edu.co`

Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana, Chía, Colombia
Email address: `camilo.rengifo@unisabana.edu.co`